

6/03/2018

(2)

Ορισμός: Μια γραμμική απεικόνιση $g: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ λέγεται ορθογώνια μετασχηματισμός όταν:

$$\langle g(x), g(y) \rangle = \langle x, y \rangle \quad \forall x, y \in \mathbb{R}^3$$

Είδαμε ότι ο πίνακας A της g

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$$

πληρεί την σχέση $A^T A = A A^T = I_3$

Σύμφωνα με ένα θεώρημα Euler υπάρχει ορθοκανονική βάση του $\mathbb{R}^3$ ως προς την οποία ο πίνακας της g λαμβάνει μια από τις ακόλουθες μορφές

$$\alpha.) \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\beta.) \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\gamma.) \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

$$\delta.) \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

$$\epsilon.) \begin{pmatrix} \pm 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \theta & \sin \theta \\ 0 & -\sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix}$$

$$\zeta.) \begin{pmatrix} \pm 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \theta & \sin \theta \\ 0 & \sin \theta & -\cos \theta \end{pmatrix}$$

Θεώρημα: Κάθε ισομετρία f του $\mathbb{R}^3$ γράφεται ως σύνθεση $f = T_v \circ g$

όπου T_v είναι μια παράλληλη μεταφορά και $g \in O(3)$ ορθογώνιος μετασχ.

Απόδειξη: Θεωρούμε την παράλληλη μεταφορά T_v με $v = -f(0)$ και ως αριθούμε $g = T_v \circ f$.

Άρκει να αποδείξουμε ότι η απεικόνιση g είναι ορθογώνιος μετασχ.

Πρέπει να αποδείξουμε ότι

(i) η g διατηρεί γωνίες

(ii) η g είναι γραμμική

Παρατηρούμε ότι η g είναι ισομετρία αφού:

2)

Θεωρούμε: Η κάθε ισομετρία f του $\mathbb{R}^3$ είναι συνθεμένη
 $f = T_v \circ g$ όπου T_v παράλληλη μεταφορά και g ορθογ. μεταβ.

$$\begin{aligned}\|g(x) - g(y)\| &= \|T_v(f(x)) - T_v(f(y))\| \\ &= \|f(x) + v - f(y) - v\| \\ &= \|f(x) - f(y)\| \\ &= \|x - y\|. \quad (1)\end{aligned}$$

Ειδικά, επειδή $g(0) = T_v(f(0)) = f(0) - f(0) = 0$

Από την σχέση (1) παρατηρούμε:

$$\|g(x)\| = \|g(x) - g(0)\| = \|x\|. \quad (2) \quad \forall x \in \mathbb{R}^3$$

Από την ιδιότητα (1) έχουμε ότι

$$\|g(x) - g(y)\|^2 = \|x - y\|^2 \quad \text{από όπου συμπεραίνουμε}$$

$$\begin{aligned}\|g(x)\|^2 - 2\langle g(x), g(y) \rangle + \|g(y)\|^2 \\ = \|x\|^2 - 2\langle x, y \rangle + \|y\|^2\end{aligned}$$

$\Rightarrow \langle g(x), g(y) \rangle = \langle x, y \rangle \quad \forall x, y \in \mathbb{R}^3$. Άρα g διατηρεί γωνίες
 Απομένει να αποδείξω ότι η g είναι γραμμική.

Επειδή η g διατηρεί γωνίες, αν $\{e_1, e_2, e_3\}$ είναι κανονική βάση του $\mathbb{R}^3$, τότε

$$\langle g(e_i), g(e_j) \rangle = \delta_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{αν } i=j \\ 0, & \text{αν } i \neq j \end{cases}$$

Επομένως και τα διανύσματα $\{g(e_1), g(e_2), g(e_3)\}$ αποτελούν ορθοκανονική βάση του $\mathbb{R}^3$.

Επομένως αν $v = (v_1, v_2, v_3) \in \mathbb{R}^3$ τότε

$$g(v) = \lambda g(e_1) + \mu g(e_2) + \kappa g(e_3)$$

πολλαπλασιάζοντας εσωτερικά με $g(e_i)$, $i \in \{1, 2, 3\}$ παρατηρούμε:

$$\lambda = \langle g(v_1), g(e_1) \rangle = \langle v_1, e_1 \rangle = v_1$$

$$\mu = \langle g(v_2), g(e_2) \rangle = \langle v_2, e_2 \rangle = v_2$$

$$\kappa = \langle g(v_3), g(e_3) \rangle = \langle v_3, e_3 \rangle = v_3$$

3)

6/03/2018

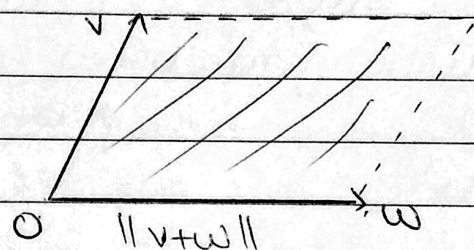
$$\begin{aligned} \text{Αρα } g(v_1 e_1 + v_2 e_2 + v_3 e_3) \\ = v_1 g(e_1) + v_2 g(e_2) + v_3 g(e_3) \end{aligned}$$

Επομένως η g είναι γραμμική. Άρα $g \in O(3)$. Τώρα έδειξή

$$\begin{aligned} g &= T_{-v} \circ f \\ \Rightarrow T_v \circ g &= T_v \circ T_{-v} \circ f = f. \end{aligned}$$

Εμβαδά - Όγκοι
(Γεωμετρική ερμηνεία)
της ορίζουσας

Ας υποθέσουμε ότι v και w είναι δύο lin ανεξαρτητικά διανύσματα του $\mathbb{R}^3$

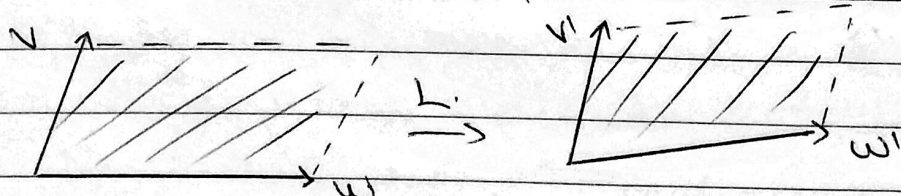


Τότε τα v και w ορίζουν ένα επίπεδο (Π) που διέχεται από την αρχή των αξόνων. Είδαμε ότι $\|v+w\|^2 = \|v\|^2 + \|w\|^2 + 2\langle v, w \rangle$ και ότι $\|v \times w\|$ περιγράφει το εμβαδό του παραλλ. με ακμείς τα v και w .

Ας μετασχηματίσουμε τα v και w ως εξής

$$\begin{cases} v' = av + bw \\ w' = \gamma v + \delta w \end{cases} \quad \text{όπου } a, b, \gamma, \delta \in \mathbb{R}$$

Τα v' και w' είναι εφόδες των v και w μέσω γραμμικών απεικονίσεων $L: \Pi \rightarrow \Pi$ με πίνακα $L = \begin{pmatrix} a & \gamma \\ b & \delta \end{pmatrix}$



$$\begin{aligned} \text{Υπολογίζουμε } v' \times w' &= (av + bw) \times (\gamma v + \delta w) \\ &= (a\delta) v \times w + (b\gamma) w \times v \\ &= (a\delta - b\gamma) v \times w. \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \|v' \times w'\| = |a\delta - b\gamma| \cdot \|v \times w\|.$$

4)

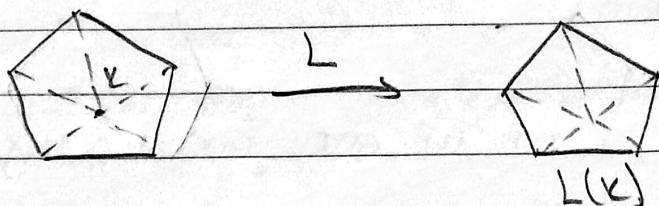
Συνεπώς,

$$\text{Area}(\text{map}(L(v), L(w)))$$

$$= |\det L| \cdot \text{Area}(\text{map}(v, w))$$

Παρατήρηση:

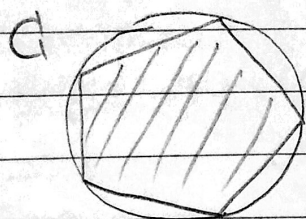
- ① Επειδή κάθε πολύγωνο K μπορεί να γραφεί ως ένωση τριγώνων



Μπορούμε να αποδείξουμε ότι το εμβαδόν E_K που περιβάλλεται εντός του K μετασχηματίζεται μέσω γραμμ. απεικ. σύμφωνα με τον τύπο:

$$\text{Area}(L(E_K)) = |\det L| \cdot \text{Area}(E_K)$$

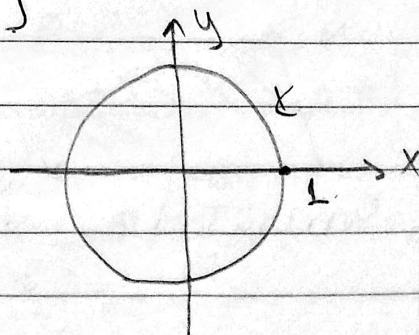
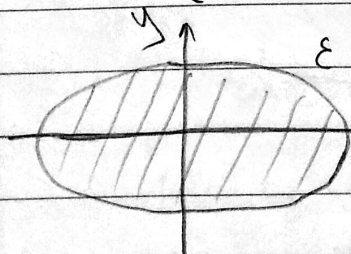
- ② Δεδομένου ότι το εμβαδόν E_K που περιβάλλεται από μια οπλή καμπύλη κομμάτι $G' \subset \mathbb{R}^2$ είναι όριο εγγεγραμμένων πολύγωνων λαμβάνουμε ότι:



$$\text{Area}(L(E_K)) = |\det L| \cdot \text{Area}(E_K)$$

Παράδειγμα: Ας υπολογίσουμε το εμβαδόν της ελλειψης

$$(E): \left\{ \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1, z=0 \right\} \quad a, b > 0$$



2,

5)

6/03/2018.

Ας θεωρήσουμε την γραμμική απεικόνιση

$L: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ με τύπο:

$$(x', y') = L(x, y) = \left(\frac{x}{a}, \frac{y}{b} \right)$$

Τότε βλέπουμε ότι $(x')^2 + (y')^2 = 1$.

Αρα η L μετασχηματίζει την ελλειψη (E) αρχικά L . Επίσης ο πίνακας της L είναι $L = \begin{pmatrix} \frac{1}{a} & 0 \\ 0 & \frac{1}{b} \end{pmatrix}$

Επομένως,

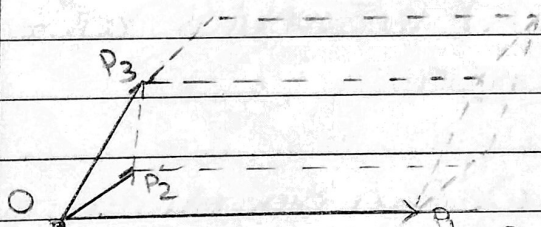
$$\text{Area}(K) = |\det L| \cdot \text{Area}(E)$$

$$\Rightarrow \pi = \frac{1}{a} \cdot \frac{1}{b} \text{Area}(E)$$

$$\Rightarrow \text{Area}(E) = a \cdot b \cdot \pi$$

Με τον ίδιο τρόπο μπορούμε να αποδείξουμε το εξής:

Θεώρημα: Έστω P_1, P_2, P_3 τρία μη συνευθειακά διάνυσμα.



Έστω επίσης, $L: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ γραμμική απεικ., τότε

$$\begin{aligned} \text{Vol}(L(P_1), L(P_2), L(P_3)) \\ = |\det L| \cdot \text{Vol}(P_1, P_2, P_3) \end{aligned}$$

→ Εξέταση Σιανόχλιατα

Ορισμός: Με τον όρο προβολοτολισμένο ευθύγραμμο τμήμα εννοούμε ένα ευθύγρ. τμήμα με καθορισμένη διάταξη για για τα άκρα του

Συνεπώς, ένα προβολοτ. ευθύγρ. τμήμα AB καθορίζει μια φορά στην ευθεία πάνω στην οποία βρίσκεται

5)

6/03/2018

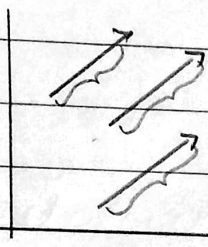
Ορισμός: Δύο παραλληλ. τμήματα που είναι βε παραλ.
Φαρείς θα λέμε ότι έχουν την ίδια διεύθυνση.

Ορισμός: Το μήκος AB θα λέγεται και μήκος του παραλληλ.
εξορισμένου τμήματος

Στο σύνολο των παραλληλ. τμήματων ορίζουμε μια σχέση
ισότητας ως εξής:

Ορισμός: Δύο παραλληλ. τμήματα λέγονται ίσα αν έχουν:

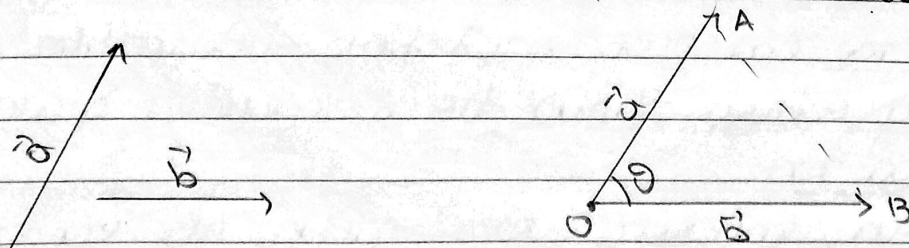
- 1.) ίδιο μήκος
- 2.) ίδια διεύθυνση (παράλληλα)
- 3.) ίδια φορά.



Η παραπάνω σχέση ισότητας χωρίζει το σύνολο των παραλληλ.
τμήματων σε κλάσεις ισοδυναμίας κάθε κλάση
θα λέγεται (ελεύθερο) διανυσμα.

Πρόταση: Όταν μιλάμε για ελεύθερα διανυσματα παίρνουμε
μόνο ένα στοιχείο της κλάσης, ως παρ. το AB και
το συμβολίζεται $\vec{AB}$. Το διανυσμα $\vec{AA}$ θα λέμε μηδενικό.

Γωνία: Έστω $\vec{a}, \vec{b}$ δυο διανυστ. θεωρούμε ένα τυχαίο σημείο
 O του $\mathbb{R}^3$ και σημεία $A, B \in \mathbb{R}^3$ έτσι ώστε: $\vec{OA} = \vec{a}$ & $\vec{OB} = \vec{b}$

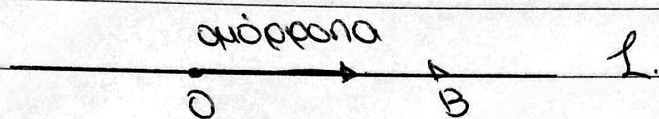
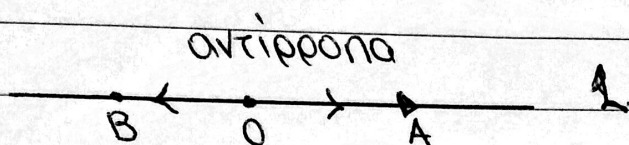


Ορίζουμε ως γωνία την κυστή γωνία των ημιευθειών
που ορίζονται από τα OA και OB . Ο αριθμός δεν
εξαρτάται από την επιλογή του O .

7.)

6/03/2018

Ορισμός: Αν τα μη-μηδενικά διάνυσμα $\vec{OA}$ και $\vec{OB}$ είναι
πάλιν στην ίδια ευθεία.



Τότε η γωνία των $\vec{OA}$ & $\vec{OB}$ είτε είναι μηδέν και τα $\vec{OA}, \vec{OB}$
λέγοντα μόρροπα ή η γωνία είναι π .

αντίρροπα. εαν $\vec{a}, \vec{b}$ είναι αντίρροπα και έχουν ίδιο μέτρο
θα γράψουμε: $\vec{b} = -\vec{a}$.